

TD 8

Exercice 1. (Point fixe) Soit $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé non réduit à un point et $f : I \rightarrow I$ de classe C^1 telle que $|f'| < 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $l \in I$.
2. Pour $u_0 \in I$, on définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a. Montrer que la suite u converge vers l .
 - b. Dans cette question, on suppose de plus que f est de classe C^r avec $r \geq 2$ et que $f^{(k)}(l) = 0$ pour tout $k = 1, \dots, r-1$ et enfin que pour tout $x \in I$, $f^{(r)}(x) \in]0, 1[$. Montrer la convergence de u vers l et que cette convergence est d'ordre au moins r .

Exercice 2. (Point fixe)

Soit $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) \neq 0$. On se donne $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$. On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = h(x_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

avec $h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(\varphi(x))}$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha] = I_\alpha$, alors la suite donnée par l'algorithme ci-dessus est bien définie.
2. On prend maintenant $x_0 \in I_\alpha$ où α est donné par la question précédente. Montrer la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers \bar{x} et que cette convergence est au moins quadratique.

Exercice 3. (Méthode du gradient à pas fixe)

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ admettant un unique minimum $\bar{x} \in \Omega$. On suppose que

- le point \bar{x} est le seul à vérifier $\nabla f(\bar{x}) = 0$,
- ∇f est lipschitzienne,
- il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|f(x)\| \geq C\|x\|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on introduit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon \nabla f(x_n).$$

1. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
2. Montrer que $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.
4. Montrer que si α est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors $\nabla f(\alpha) = 0$.
5. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \bar{x} .